Esame del 24/11/2022

mercoledì 28 settembre 2022 18:15

Es 1 :

Sol

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{3}\,t - \sin(t),\ t + \sqrt{3}\sin(t),\ 2\cos(t)\right)$$

Curvatura:

$$K(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

$$\gamma'(t) = \left(\sqrt{3} - \cos(t),\ 1 + \sqrt{3}\cos(t),\ -2\sin(t)\right)$$

$$\gamma''(t) = \left(\sin(t),\ -\sqrt{3}\sin(t),\ -2\cos(t)\right)$$

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt{3}-\cos(t) & 1+\sqrt{3}\cos(t) & -2\sin(t) \\ \sin(t) & -\sqrt{3}\sin(t) & -2\cos(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-2\cos(t) - 2\sqrt{3}\cos^2(t) - 2\sqrt{3}\sin^2(t),\ -\left(-2\sqrt{3}\cos(t) + 2\cos^2(t) + 2\sin^2(t)\right),\ -3\sin(t) + \sqrt{3}\sin(t)\cos(t) - \sin(t) - \sqrt{3}\sin(t)\cos(t)\right) =$$

$$= \left(-2\cos(t) - 2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\cos(t) - 2,\ -4\sin(t)\right)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\underline{3} + \underline{\cos^2(t)} \cancel{-2\sqrt{3}\cos(t)} + \underline{1} + \underline{3\cos^2(t)} \cancel{+2\sqrt{3}\cos(t)} + 4\sin^2(t)} =$$

$$= \sqrt{4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) + 4} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = \sqrt{\underline{4\cos^2(t)} + 12 \cancel{+ 8\sqrt{3}\cos(t)} + \underline{12\cos^2(t)} + 4 \cancel{- 8\sqrt{3}\cos(t)} + 16\sin^2(t)} =$$

$$= \sqrt{16\cos^2(t) + 16 + 16\sin^2(t)} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Dunque

$$K(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{4\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^3} = \frac{4\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{8 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

Torsione:

$$\tau(t) = \frac{\left(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\right) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$$

$$\gamma'''(t) = \left(\cos(t),\ -\sqrt{3}\cos(t),\ 2\sin(t)\right)$$

Ora

$$(\gamma'(t)\wedge\gamma''(t))\cdot\gamma'''(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(t)-2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}\cos(t)-2 \\ -4\sin(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sqrt{3}\cos(t)\\ 2\sin(t)\end{pmatrix} =$$

$$= -2\cos^2(t) \cancel{-2\sqrt{3}\cos(t)} - 6\cos^2(t) \cancel{+2\sqrt{3}\cos(t)} - 8\sin^2(t) =$$

$$= -8\cos^2(t) - 8\sin^2(t) = -8$$

Dunque

$$\tau(t) = \frac{-8}{(4\sqrt{2})^2} = -\frac{8}{32} = -\frac{1}{4}$$

$\blacksquare$

Es 2:

Sol

Dobbiamo determinare una parametrizzazione regolare per S
Usiamo la parametrizzazione classica del toro con centro in $C=\begin{pmatrix}3\\0\\-7\end{pmatrix}$ con raggio $r=2$

In generale si ha:

$$\varphi(t,\theta) \to \begin{cases} x = (\overset{R=x_0}{R} + \overset{\text{raggio}}{r}\cos(t))\cos(\theta) \\ y = (R + r\cos(t))\sin(\theta) \\ z = z_0 + r\sin(t)\end{cases}$$

Per cui la nostra parametrizzazione sarà:

$$\varphi(t,\theta) \to \begin{cases} (3+2\cos(t))\cos(\theta) \\ (3+2\cos(t))\sin(\theta) \\ -7+2\sin(t)\end{cases} \qquad \begin{array}{l} t\in[0,2\pi] \\ \theta\in[0,2\pi]\end{array}$$

Stabiliamo ora la natura dei punti di S:
Per capire la natura dei punti di S dobbiamo calcolare $K(p)$ che è dato da:

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

Se $K(p)>0$ $\Rightarrow$ i punti sono ellittici
Se $K(p)<0$ $\Rightarrow$ i punti sono iperbolici
Se $K(p)=0$ e $d_pN\neq 0$ $\Rightarrow$ i punti sono parabolici
Se $K(p)=0$ e $d_pN=0$ $\Rightarrow$ i punti sono planari.

Occupiamoci allora di calcolare E, F, G dell[illegible]

Se $K(p)=0$ e $d_pN=0 \Rightarrow$ i punti sono planari.

Occupiamoci allora di calcolare E, F, G della prima forma fondamentale e L, M, N della seconda forma fondamentale.

Ricordiamo che la nostra parametrizzazione è:

$$\varphi(t,\theta) = \begin{cases} x = (3+2\cos(t))\cos(\theta) \\ y = (3+2\cos(t))\sin(\theta) \\ z = -7+2\sin(t) \end{cases}$$

Dunque si ha:

$$E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle$$
$$F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle$$
$$G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle$$

Ora

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} -2\sin(t)\cos(\theta) \\ -2\sin(t)\sin(\theta) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi_\theta = \begin{pmatrix} -(3+2\cos(t))\sin(\theta) \\ (3+2\cos(t))\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 4\sin^2(t)\cos^2(\theta) + 4\sin^2(t)\sin^2(\theta) + 4\cos^2(t) = $$
$$= 4$$

$$F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle = 2(3+2\cos(t))\sin(t)\cos(\theta)\sin(\theta) - 2(3+2\cos(t))\sin(t)\sin(\theta)\cos(\theta) + 0 = $$
$$= 0$$

$$G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle = (3+2\cos(t))^2\sin^2(\theta) + (3+2\cos(t))^2\cos^2(\theta) + 0 = $$
$$= (3+2\cos(t))^2$$

Adesso calcoliamo L, M, N:

$$L = \tilde{N} \cdot \varphi_{tt}$$
$$M = \tilde{N} \cdot \varphi_{t\theta}$$
$$N = \tilde{N} \cdot \varphi_{\theta\theta}$$

dove $\tilde{N}$ è il versore normale dato da:

$$\tilde{N} = \frac{\varphi_t \wedge \varphi_\theta}{\|\varphi_t \wedge \varphi_\theta\|}$$

Cominciamo col calcolare $\tilde{N}$:

$$\varphi_t \wedge \varphi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\sin(t)\cos(\theta) & -2\sin(t)\sin(\theta) & 2\cos(t) \\ -(3+2\cos(t))\sin(\theta) & (3+2\cos(t))\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-2(3+2\cos(t))\cos(t)\cos(\theta), -2(3+2\cos(t))\cos(t)\sin(\theta), -2(3+2\cos(t))\sin(t)\cos^2(\theta) - 2(3+2\cos(t))\sin(t)\sin^2(\theta)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -2(3+2\cos(t))\cos(t)\cos(\theta) \\ -2(3+2\cos(t))\cos(t)\sin(\theta) \\ -2(3+2\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\|\varphi_t \wedge \varphi_\theta\| = \sqrt{4(3+2\cos(t))^2\cos^2(t)\cos^2(\theta) + 4(3+2\cos(t))^2\cos^2(t)\sin^2(\theta) + 4(3+2\cos(t))^2\sin^2(t)} =$$

$\Rightarrow$
$$\|\varphi_t \wedge \varphi_\theta\| = \sqrt{4(3+2\cos(t))^2\cos^2(t)\cos^2(\theta) + 4(3+2\cos(t))^2\cos^2(t)\sin^2(\theta) + 4(3+2\cos(t))^2\sin^2(t)} =$$

$$= \sqrt{4(3+2\cos(t))^2} = 2(3+2\cos(t))$$

In conclusione
$$\tilde{N} = \frac{\varphi_t \wedge \varphi_\theta}{\|\varphi_t \wedge \varphi_\theta\|} = \begin{pmatrix} -\cos(t)\cos(\theta) \\ -\cos(t)\sin(\theta) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

Adesso ci servono $\varphi_{tt}, \varphi_{t\theta}, \varphi_{\theta\theta}$:

$$\varphi_{tt} = (-2\cos(t)\cos(\theta), -2\cos(t)\sin(\theta), -2\sin(t))$$

$$\varphi_{t\theta} = (2\sin(t)\sin(\theta), -2\sin(t)\cos(\theta), 0)$$

$$\varphi_{\theta\theta} = (-(3+2\cos(t))\cos(\theta), -(3+2\cos(t))\sin(\theta), 0)$$

Adesso abbiamo tutto:

$$L = \langle \tilde{N}, \varphi_{tt} \rangle = \begin{pmatrix} -\cos(t)\cos(\theta) \\ -\cos(t)\sin(\theta) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\cos(t)\cos(\theta) \\ -2\cos(t)\sin(\theta) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix} =$$

$$= 2\cos^2(t)\cos^2(\theta) + 2\cos^2(t)\sin^2(\theta) + 2\sin^2(t) = 2$$

$$M = \langle \tilde{N}, \varphi_{t\theta} \rangle = \begin{pmatrix} -\cos(t)\cos(\theta) \\ -\cos(t)\sin(\theta) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sin(t)\sin(\theta) \\ -2\sin(t)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\cos(t)\sin(t)\cos(\theta)\sin(\theta) + 2\cos(t)\sin(t)\sin(\theta)\cos(\theta) + 0 = 0$$

$$N = \langle \tilde{N}, \varphi_{\theta\theta} \rangle = \begin{pmatrix} -\cos(t)\cos(\theta) \\ -\cos(t)\sin(\theta) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(3+2\cos(t))\cos(\theta) \\ -(3+2\cos(t))\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (3+2\cos(t))\cos(t)\cos^2(\theta) + (3+2\cos(t))\cos(t)\sin^2(\theta) + 0 =$$

$$= (3+2\cos(t))\cos(t)$$

Perciò
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{2(3+2\cos(t))\cos(t) - 0}{4(3+2\cos(t))^2 - 0} = \frac{\cos(t)}{3+2\cos(t)}$$

Studiamo ora il segno di K:

$$1)\ K > 0 \iff \frac{\cos(t)}{3+2\cos(t)} > 0$$

$\Rightarrow$ $\cos(t) > 0 \Rightarrow t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$3+2\cos(t) > 0 \Rightarrow \cos(t) > -\frac{3}{2} \Rightarrow$ sempre vero $\forall$

$K>0$ se $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow$ i punti sono ellittici

2) $K<0$ se e solo se $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ $\Rightarrow$ i punti sono iperbolici

3) $K=0$ $\Leftrightarrow$ $\cos(t)=0$ $\Leftrightarrow$ $t=\frac{\pi}{2}$ oppure $t=\frac{3}{2}\pi$

Per $K=0$ dobbiamo vedere come si comporta d_pN

Dunque

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4(3+2\cos(t))^2}\begin{pmatrix} (3+2\cos(t))^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (3+2\cos(t))\cos(t) \end{pmatrix}$$

Distinguiamo due casi:

CASO 1: $t=\frac{\pi}{2}$

CASO 2: $t=\frac{3}{2}\pi$

$\Rightarrow$ CASO 1:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Per $t=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $K=0$ e $d_pN \neq 0$ $\Rightarrow$ i punti sono parabolici

CASO 2:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Per $t=\frac{3}{2}\pi$ $\Rightarrow$ $K=0$ e $d_pN \neq 0$ $\Rightarrow$ Punti sono parabolici

$\blacksquare$

ES 3

SOL

$0 \rightarrow -\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}i \rightarrow \infty$

$1 \rightarrow -\frac{8+i}{13}$

In generale la trasformazione di Moebius è così definita:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Noi vogliamo che:

$$T(0) = -\frac{1}{2}$$

$$T\left(\tfrac{2}{3}i\right) = \infty$$

$$T(1) = -\frac{8+i}{13}$$

Per comodità sia $c=1$:

$$T(z) = \frac{az+b}{z+d}$$

Dunque

$$T(0) = \frac{b}{d} \overset{\text{impongo}}{=} -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{d}{2}$$

$$T\left(\tfrac{2}{3}i\right) = \frac{a\cdot\frac{2}{3}i + b}{\frac{2}{3}i + d} \overset{\text{impongo}}{=} \infty \iff \frac{2}{3}i + d = 0 \Rightarrow d = -\frac{2}{3}i$$

Ma allora dato che $b = -\frac{d}{2} \Rightarrow b = -\frac{-\frac{2}{3}i}{2} = \frac{i}{3}$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{az+b}{z+d} = \frac{az+\frac{i}{3}}{z-\frac{2}{3}i}$$

Infine resta l'ultima condizione

$$T(1) = \frac{a+\frac{i}{3}}{1-\frac{2}{3}i} \overset{\text{impongo}}{=} -\frac{8+i}{13}$$

$$\Rightarrow a + \frac{i}{3} = -\frac{8+i}{13}\left(1-\frac{2}{3}i\right) = -\frac{8+i}{13} + \frac{16i+2i^2}{39} =$$

$$= -\frac{8+i}{13} + \frac{16i-2}{39} =$$

$$= \frac{-24-3i+16i-2}{39} = \frac{13i-26}{39}$$

$$= \frac{i}{3} - \frac{26}{39}$$

$$\Rightarrow a + \frac{i}{3} = \frac{i}{3} - \frac{26}{39} \Rightarrow a = -\frac{26}{39} = -\frac{2}{3}$$

In conclusione

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{-\frac{2}{3}z + \frac{i}{3}}{z - \frac{2}{3}i}$$

Vogliamo ora trovare $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tale per cui l'immagine della circonferenza A è una retta.
Per far ciò usiamo la nostra $T(z)$ appena trovata:

$$T(z) = \frac{-\frac{2}{3}z + \frac{i}{3}}{z - \frac{2}{3}i}$$

cerchiamo quel $\tilde{z}$ t.c. $T(\tilde{z}) = \infty$; per fortuna dal punto precedente sappiamo già che $T\left(\frac{2}{3}i\right) = \infty$

$$\Rightarrow \tilde{z} = \frac{2}{3}i$$

Allora

$$d\left(\frac{2}{3}i, -\frac{5}{3}i\right) = 1 \qquad \Rightarrow \lambda = 1$$

$z \xrightarrow{T} w$; calcoliamo ora l'inversa di $T(z)$:

Sappiamo che
$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Dunque nel nostro caso avremo che:
$$T^{-1}(w) = \frac{-\frac{2}{3}iw - \frac{i}{3}}{-w - \frac{2}{3}}$$

A questo punto consideriamo la quantità:
$$\left| \underbrace{\frac{-\frac{2}{3}iw - \frac{i}{3}}{-w - \frac{2}{3}}}_{T^{-1}(w)} - \underbrace{\frac{5}{3}i}_{\text{è dato dalla traccia}} \right| = 1$$

$\Rightarrow$
$$\left| -\frac{2}{3}iw - \frac{i}{3} - \frac{5}{3}i\left(-w - \frac{2}{3}\right) \right| = \left| -w - \frac{2}{3} \right|$$

$\Rightarrow$
$$\left| -\frac{2}{3}iw - \frac{i}{3} + \frac{5}{3}iw + \frac{10}{9}i \right| = \left| -w - \frac{2}{3} \right|$$

$\Rightarrow$
$$\left| iw + \frac{7}{9}i \right| = \left| -w - \frac{2}{3} \right|$$

A questo punto poniamo $w = u + iv$

$\Rightarrow$
$$\left| i(u+iv) + \frac{7}{9}i \right| = \left| -(u+iv) - \frac{2}{3} \right|$$

$\Rightarrow$
$$\left| iu - v + \frac{7}{9}i \right| = \left| -u - iv - \frac{2}{3} \right|$$

$$\Rightarrow \left| -v + i\left(u + \frac{7}{9}\right) \right| = \left| -u - \frac{2}{3} - iv \right|$$

Eleviamo tutto al quadrato:
$$\left| -v + i\left(u + \frac{7}{9}\right) \right|^2 = \left| -u - \frac{2}{3} - iv \right|^2$$

$\Rightarrow$ (ATT: non è uno sviluppo al quadrato "normale")
$$v^2 + \left(u + \frac{7}{9}\right)^2 = \left(u + \frac{2}{3}\right)^2 + v^2$$

$\Rightarrow$
$$u^2 + \frac{49}{81} + \frac{14}{9}u = u^2 + \frac{4}{9} + \frac{4}{3}u$$

$$\Rightarrow \frac{14}{9}u - \frac{4}{3}u + \frac{49}{81} - \frac{4}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{14}{9}U - \frac{4}{3}U + \frac{49}{81} - \frac{4}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{14U - 12U}{9} + \frac{49-36}{81} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9}U + \frac{13}{81} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{18U + 13}{81} = 0 \quad \Rightarrow \quad 18U + 13 = 0$$

■

ES 4

SOL

1) $$\int_{\gamma(-5i;2)} \frac{e^{3iz}}{(z+4i)^3}\,dz + \int_{\gamma(-8i,1)} \frac{e^{10iz}}{(z-4i)^3}\,dz$$

Osserviamo che nel primo integrale è presente una singolarità in $-4i$

Nel secondo integrale tuttavia $-4i \notin \gamma(-8i,1)$

Allora il secondo integrale fa zero per il TEO di CAUCHY

Per il primo integrale invece, vale il seguente risultato:

$$\int_{\gamma(z_0,1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Nel nostro caso avremo che:

$z_0 = -4i$

$$\int_{\gamma(-5i,2)} \frac{\overbrace{e^{3iz}}^{=f(z)}}{(z+4i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(z_0) = \frac{2\pi i}{2!}\cdot\left(-9\,e^{3i(-4i)}\right) = -9\pi i\, e^{12}$$

$$f' = 3i\,e^{3iz}$$

$$f'' = (3i)^2 e^{3iz} = -9\,e^{3iz}$$

In conclusione:

$$\int_{\gamma(-5i,2)} \frac{e^{3iz}}{(z+4i)^3}\,dz + \int_{\gamma(-8i,1)} \frac{e^{10iz}}{(z-4i)^3}\,dz = -9\pi i\, e^{12} + 0 = -9\pi i\, e^{12}$$

2) $$\int_{\gamma\left(-1,\frac{\sqrt{35}}{2}\right)} z^3 \cos\left(\frac{1}{z+i}\right) dz$$

Dobbiamo usare il TEO dei RESIDUI:

La nostra singolarità è $z=-i$

Sviluppiamo inoltre $\cos\left(\frac{1}{z+i}\right)$, si ha:

$$\cos\left(\frac{1}{z+i}\right)=1-\frac{1}{2(z+i)^2}+\frac{1}{4!(z+i)^4}-\dots$$

$\Rightarrow$
$$z^3\cdot\cos\left(\frac{1}{z+i}\right)=z^3\left(1-\frac{1}{2(z+i)^2}+\frac{1}{4!(z+i)^4}\right)$$

A questo punto riscriviamo z come $z=z+i-i$

$\Rightarrow$
$$z^3=(z+i-i)^3=(z+i)^3-i^3-3(z+i)^2i-3(z+i)i^2=$$
$$=(z+i)^3-i^2\cdot i-3(z+i)^2i-3(z+i)=$$
$$=(z+i)^3+i-3i(z+i)^2-3(z+i)$$

Dunque

$$z^3\cos\left(\frac{1}{z+i}\right)=\left[(z+i)^3+i-3i(z+i)^2-3(z+i)\right]\left[1-\frac{1}{2(z+i)^2}+\frac{1}{4!(z+i)^4}\right]=$$

$$=(z+i)^3-\frac{1}{2}(z+i)+\frac{1}{4!(z+i)}+i-\frac{i}{2(z+i)^2}+\frac{i}{4!(z+i)^4}-3i(z+i)^2+\frac{3}{2}i-\frac{3i}{4!(z+i)^2}+$$
$$-3(z+i)+\frac{3}{2(z+i)}-\frac{3}{4!(z+i)^3}$$

A questo punto il Residuo è dato dalla somma dei coefficienti che presentano $(z-z_0)^{-1}$ (oss: è importante solo quelli con -1)

Dunque sono i seguenti: $\frac{1}{4!}$ e $\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(z^3\cos\left(\frac{1}{z+i}\right)\right)=\frac{1}{4!}+\frac{3}{2}=\frac{1}{24}+\frac{3}{2}=\frac{1+36}{24}=\frac{37}{24}$$

Applicando il Teorema dei Residui si ha:

$$\int_{\gamma(-1,\frac{\sqrt{35}}{2})}\overbrace{z^3\cos\left(\frac{1}{z+i}\right)}^{f(z)}dz=2\pi i\cdot\operatorname{Res}(f(z))=2\pi i\cdot\frac{37}{24}=\frac{37}{12}\pi i$$

3) $$f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-4i)}$$

Notiamo che $f(z)$ ha due poli semplici: $z=-i$ e $z=4i$

Consideriamo allora due casi:

<u>1° CASO</u>: Dischi di raggio $\rho<d(-i,4i)=5\Rightarrow|z+i|<5$

Dunque

$$f(z) = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z-4i} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z+i-5i}$$

Sviluppiamo $\frac{1}{z+i-5i}$, si ha: Serie Geometrica

$$\frac{1}{z+i-5i} = \frac{1 \cdot \left(-\frac{1}{5i}\right)}{[z+i-5i]\left(-\frac{1}{5i}\right)} = \frac{-\frac{1}{5i}}{1-\frac{z+i}{5i}} = -\frac{1}{5i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{5i}\right)^n =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(5i)^{n+1}}$$

Per cui:

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)} \cdot \frac{1}{(z-4i)} = \frac{1}{z+i} \cdot \left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(5i)^{n+1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{z+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(5i)^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^{n-1}}{(5i)^{n+1}}$$

2° Caso: Consideriamo ora $|z+i| > 5$

In questo caso sono considerate entrambe le singolarità

Dunque

$$\frac{1}{z-4i} = \frac{1}{z+i-5i} = \frac{\frac{1}{z+i}}{(z+i-5i)\frac{1}{z+i}} = \frac{\frac{1}{z+i}}{1-\frac{5i}{z+i}} =$$

$$= \frac{1}{z+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5i}{z+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5i)^n}{(z+i)^{n+1}}$$

Dunque

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-4i)} = \frac{1}{(z+i)} \cdot \frac{1}{(z-4i)} = \frac{1}{z+i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5i)^n}{(z+i)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5i)^n}{(z+i)^{n+2}}$$

4) $$f(z) \overset{def}{=} \frac{(z^2+9)^4 \sin(z^2)}{z^3(z^2+7)^4(z^2-iz+6)^2}$$

• Cominciamo col numeratore:

$(z^2+9)^4 = 0 \Rightarrow z^2+9=0 \Rightarrow z^2=-9 \Rightarrow z = \begin{cases} 3i & \text{molteplicità } 4 \\ -3i & \text{molteplicità } 4 \end{cases}$

$\sin(z^2) = 0 \Rightarrow z^2 = k\pi \Rightarrow z = \pm\sqrt{k\pi}$

Però se $k=0 \Rightarrow z=0$ molteplicità 2

se $k \neq 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{k\pi}$ molteplicità 1

• Passiamo ora al denominatore:

$z^3 = 0 \Rightarrow z=0$ molteplicità 3

$(z^2+7)^4 = 0 \Rightarrow z^2+7=0 \Rightarrow z^2=-7 \Rightarrow z = \begin{cases} i & \text{molteplicità } 4 \\ -i & \text{molteplicità } 4 \end{cases}$

$(z^2-iz+6)^2 = 0 \Rightarrow z^2-iz+6=0$

$\Rightarrow z = \frac{i \pm \sqrt{-1-24}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} \frac{i-5i}{2} = -2i & \text{moltepl } 2 \\ \frac{i+5i}{2} = 3i & \text{moltepl } 2 \end{cases}$

Riassumendo:

Zeri:	Poli:
$z=3i$ (molt 4)	$z=0$ (molt 3)
$z=-3i$ (molt 4)	$z=i$ (molt 4)
	$z=-i$ (molt 4)
$z=\pm\sqrt{k\pi}$ (molt 1 se $k\neq 0$)	$z=-2i$ (molt 2)
$z=0$ (molt 2 se $k=0$)	$z=3i$ (molt 2)

Osserviamo che $z=3i$ compare sia negli zeri che nei poli, facciamo allora la differenza delle rispettive molteplicità e prendiamo quella che "sopravvive". (Analogamente per $z=0$)

In conclusione:

$z=0$ polo di ordine 1 (Anche detto polo semplice)

$z=i$ polo di ordine 4

$z=-i$ " " " 4

$z=-2i$ " " " 2

$z=-3i$ zero di ordine 4

$z=\pm\sqrt{k\pi}$ zero di ordine 1 se $k\neq 0$ (Anche detto zero semplice)

$z=3i$ zero di ordine 2

$\blacksquare$

ES 5

SOL

$$f(z)=6\bar{z}^2-2\bar{z}-4i|z|^2$$

Per prima cosa riscriviamo il modulo, si ha:

$$f(z)=6\bar{z}^2-2\bar{z}-4i|z|^2=6\bar{z}^2-2\bar{z}-4iz\cdot\bar{z}$$

f soddisfa le condizioni di C-R $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$

Dunque

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=12\bar{z}-2-4iz$$

Imponiamo $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$:

$$12\bar{z}-2-4iz=0$$

Riscriviamo z e $\bar{z}$ come $z=x+iy$ e $\bar{z}=x-iy$

Dunque si ha:

$$12(x-iy)-2-4i(x+iy)=0$$

$\Rightarrow$

$$12x-12iy-2-4ix+4y=0$$

$\Rightarrow$
$12x - 12iy - 2 - 4ix + 4y = 0$

$\Rightarrow$
$12x + 4y - 2 + i(-12y - 4x) = 0$

Deve risultare $Re(f) = Re(0)$
$Im(f) = Im(0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12x + 4y - 2 = 0 \\ -12y - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 4y - 2 = 0 \\ 4x = -12y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 4y - 2 = 0 \\ x = -3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -36y + 4y = 2 \\ x = -3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -32y = 2 \\ x = -3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{16} \\ x = -3\left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{3}{16} \end{cases}$$

$\Rightarrow$
$z_0 = x + iy = \frac{3}{16} - i\frac{1}{16}$

$\Rightarrow$ f è derivabile in senso complesso in z_0

2) "Segue dal teorema fondamentale dell'algebra

$\blacksquare$

Esame 21/01/2022

sabato 2 settembre 2023   16:07

Es 1

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$$

Calcolare Curvatura e Torsione

SOL

$$K = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$$

$$\gamma'(t) = \left(1, -\frac{1}{t^2}, -\frac{1+t^2}{t^2}\right)$$

$$\gamma''(t) = \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right)$$

$$\Rightarrow \gamma' \wedge \gamma'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -\frac{1}{t^2} & -\frac{1+t^2}{t^2} \\ 0 & \frac{2}{t^3} & \frac{2}{t^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right)$$

$$\Rightarrow \|\gamma' \wedge \gamma''\| = \sqrt{\frac{4}{t^6} + \frac{4}{t^6} + \frac{4}{t^6}} = \sqrt{\frac{12}{t^6}} = \frac{2}{t^3}\sqrt{3}$$

$$\|\gamma'\| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^4} + \frac{(1+t^2)^2}{t^4}} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{t^4} + \frac{1+t^4+2t^2}{t^4}} = \sqrt{1 + \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^4} + 1 + \frac{2}{t^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 2} = \sqrt{\frac{2}{t^2}\left(\frac{1}{t^2} + 1 + t^2\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{t^2} + 2 + 2t^2}}{t}$$

$$\Rightarrow \|\gamma'\|^3 = \frac{\left(\frac{2}{t^2} + 2 + 2t^2\right)\sqrt{\frac{2}{t^2} + 2 + 2t^2}}{t^3}$$

$$\Rightarrow K = \frac{2}{t^3}\sqrt{3} \cdot \frac{t^3}{\left(\frac{2}{t^2}+2+2t^2\right)\sqrt{\frac{2}{t^2}+2+2t^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{\frac{2}{t^2}+2+2t^2}\right)^3}$$

$$\tau = \frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}$$

$$\gamma'''(t) = \left(0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4}\right)$$

$$\Rightarrow \langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle = \begin{pmatrix} \frac{2}{t^3} \\ -\frac{2}{t^3} \\ 2/t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{t^4} \\ -\frac{6}{t^4} \end{pmatrix} = 0 + \frac{12}{t^7} - \frac{12}{t^7} = 0$$

$$\Rightarrow \tau = 0$$

$\blacksquare$

ES 2 :

$$r(u,v) = \left(\frac{7}{u}, v, u+v^2\right)$$

- Stabilire natura dei punti di S
- Determinare curvatura media, direzioni principali e curvatura principale in $P = (-7, 0, -7)$

Sol

~

Es 3 :

Determinare $T(z)$ t.c.

$0 \to -i$

$i \to \infty$

$$0 \to -i$$

$$\frac{i}{2} \to \infty$$

$$1 \to -1+i$$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\Rightarrow c=1 \Rightarrow T(z) = \frac{az+b}{z+d}$$

$$T(0) = \frac{b}{d} = -i$$

$$\Rightarrow b = -id$$

$$T(z) = \frac{az - id}{z+d}$$

$$T\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{a \cdot \frac{i}{2} - id}{\frac{i}{2} + d} = \infty \Rightarrow \frac{i}{2} + d = 0 \Rightarrow d = -\frac{i}{2}$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{az - \frac{1}{2}}{z - \frac{i}{2}}$$

$$T(1) = \frac{a - \frac{1}{2}}{1 - \frac{i}{2}} = -1+i$$

Sia $a = a_1 + i a_2$

$$\Rightarrow a_1 + i a_2 - \frac{1}{2} = (-1+i)\left(1 - \frac{i}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a_1 + i a_2 - \frac{1}{2} = -1 + \frac{i}{2} + i + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 + i a_2 - \frac{1}{2} = -1 + \frac{i}{2} + i + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 + i a_2 = i\left(\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T(z) = \frac{i\frac{3}{2} z - \frac{1}{2}}{z - \frac{i}{2}}$$

2) $A = \{ z \in C \mid |z| = \lambda \}$

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a} = \frac{-\frac{i}{2} w + \frac{1}{2}}{-w + \frac{3}{2} i}$$

$$d\left(\frac{i}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\left| \frac{-\frac{i}{2} w + \frac{1}{2}}{-w + \frac{3}{2} i} \right| = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\left| -\frac{i}{2} w + \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{w}{2} + \frac{3}{4} i \right|$$

$w = u + iv$

$\Rightarrow$

$$\left| -\frac{1}{2}(u + iv) + \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2}(u + iv) + \frac{3}{4} i \right|$$

$\Rightarrow$

$$\left|-\frac{1}{2}(u+iv)+\frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}(u+iv)+\frac{3}{4}i\right|$$

$\Rightarrow$

$$\left|-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}iv+\frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}iv+\frac{3}{4}i\right|$$

$\Rightarrow$

$$\left|-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}-iv\frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}u+i\left(-\frac{1}{2}v+\frac{3}{4}\right)\right|$$

$\Rightarrow$

$$\left|-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}-iv\frac{1}{2}\right|^2 = \left|-\frac{1}{2}u+i\left(-\frac{1}{2}v+\frac{3}{4}\right)\right|^2$$

$\Rightarrow$

$$\left(-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{v^2}{4} = \frac{1}{4}u^2+\left(-\frac{1}{2}v+\frac{3}{4}\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$\cancel{\frac{1}{4}u^2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}u+\cancel{\frac{v^2}{4}} = \cancel{\frac{1}{4}u^2}+\cancel{\frac{1}{4}v^2}+\frac{9}{16}-\frac{3}{4}v$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{1}{2}u+\frac{3}{4}v+\frac{1}{4}-\frac{9}{16}=0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-8u+12v+4-9}{16}=0$$

$\Rightarrow$ $8u-12v+5=0$

$\blacksquare$

E) 4

$$\int_{\gamma(\frac{1}{2},2)} -2 z^2 \sin\left(\frac{1}{z-i}\right) dz$$

$\Rightarrow$

$$-2 \int_\gamma z^2 \sin\left(\frac{1}{z-i}\right) dz$$

USO TEO DEI RESIDUI

$$\sin\left(\frac{1}{z-i}\right) = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{3!(z-i)^3} + \frac{1}{5!(z-i)^5}$$

$$z^2 = (z-i+i)^2 = (z-i)^2 + i^2 + 2i(z-i) =$$

$$= (z-i)^2 - 1 + 2i(z-i)$$

Dunque

$$z^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{z-i}\right) = \left[(z-i)^2 + 2i(z-i) - 1\right]\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{3!(z-i)^3} + \frac{1}{5!(z-i)^5}\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$$

$\Rightarrow$

$$-2 \int_\gamma z^2 \sin\left(\frac{1}{z-i}\right) = -2 \cdot 2\pi i \cdot -\frac{5}{6} = +\frac{10\pi i}{3}$$

2) Trovare serie di Laurent centrata in $z = -4i$ di

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 5iz - 4}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2+5iz-4} = \frac{1}{(z+4i)(z+i)}$$

Abbiamo come singolarità $z=-4i$ e $z=-i$

$$d(-4i,-i) = 3$$

• Sia $r < 3 \Rightarrow |z+4i| < 3$

$$f(z) = \frac{1}{z+4i} \cdot \frac{1}{z+i}$$

Si ha

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z+4i-3i} = \frac{1}{3i\left(\frac{z+4i}{3i}-1\right)} =$$

$$= \frac{1}{-3i\left(1-\frac{z+4i}{3i}\right)} = -\frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+4i}{3i}\right)^n =$$

$$= -\sum \frac{(z+4i)^n}{(3i)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z+4i} \cdot \left(-\sum_{n=0}\frac{(z+4i)^n}{(3i)^{n+1}}\right) = -\sum\frac{(z+4i)^{n-1}}{(3i)^{n+1}}$$

• $r > 3 \Rightarrow |z+4i| > 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z+4i-3i} = \frac{1}{z+4i\left(1-\frac{3i}{\cdot}\right)} =$$

$$\frac{i}{z+i} = \frac{i}{z+4i-3i} = \frac{i}{z+4i\left(1-\frac{3i}{z+4i}\right)}$$

$$= \frac{1}{z+4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3i}{z+4i}\right)^n$$

$$= \sum \frac{(3i)^n}{(z+4i)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z+4i}\sum\frac{(3i)^n}{(z+4i)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3i)^n}{(z+4i)^{n+2}}$$

Determinare poli e zeri di

$$f(z) = \frac{z^7(z^3+8)(z-7)^2}{(z+2)^3\sin(z^2)}$$

$z=0 \Rightarrow$ zero di ordine 7

$z^3+8=0 \Rightarrow z=-2 \Rightarrow$ zero di molt 3

$z-7=0 \Rightarrow z=7 \Rightarrow$ zero di ordine 2

$z=-2 \Rightarrow$ polo di ordine 3

$\sin(z^2)=0 \Leftrightarrow z^2 = k\pi \Leftrightarrow z=\sqrt{k\pi}$

Se $k=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow$ polo di ordine 2

Se $k\neq 0 \Rightarrow z=\sqrt{k\pi} \Rightarrow$ polo di ordine 2

Riassumendo

$z=0$ zero di ordine 5

????

Es 5

$$f(z) = z^2 + a z\bar{z} + 2 z\bar{z} + b\bar{z} + 3\bar{z} + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow a z + 2z + b + 3 = 0$$

$$\Rightarrow z(a+2) + b + 3 = 0$$

Sia $a = -2 \Rightarrow b = -3$

$\Rightarrow a = -2$ e $b = -3$

D

Esame 30/03/2023

lunedì 4 settembre 2023 15:21

Es 1

SOL